Ein unfaires Würfelspiel

Egbert möchte auf dem Markt ein Würfelspiel anbieten, in dem mehrfach zwei frei wählbare Würfel benutzt werden. Er hat für dieses Spiel einen fairen (F) und einen unfairen (U) Würfel herausgesucht. Seine Kunden haben hiervon keine Ahnung.

Nach seiner bisherigen Erfahrung wechseln die Spieler in $\frac{2}{3}$ der Fälle nach einem Wurf den Würfel und verwenden ihn in $\frac{1}{3}$ der Fälle im nächsten Wurf weiter. Für den ersten Wurf wird jeder Würfel gleich wahrscheinlich gewählt.

Aufgabe 1 Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Auswahl des unfairen Würfels im zweiten, fünften und achten Wurf. Gehen Sie davon aus, dass Egbert im ersten Wurf jeden Würfel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wählt.

> **Hinweis.** Vektoren $\vec{\pi}$ mit n Einträgen sind mit als $(n \times 1)$-Matrix zu definieren. Die Elemente an den Stellen k müssen daher mit $\pi[k, 1]$ aufgerufen werden.

Aufgabe 2 Mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1 kann noch keine Aussage über den möglichen Gewinn gemacht werden. Hierzu müssen die Wahrscheinlichkeiten des Wurfes einer Sechs mit beiden Würfeln berücksichtigt werden. Dies wird zunächst an zwei Würfen berechnet.

a) Geben Sie die Möglichkeiten der Auswahl des fairen (F) und des unfairen (U) Würfels in zwei Würfen an.

> **Hinweis.** Notieren Sie die Kombinationen mit *Tupeln* (x_1, x_2), bei denen $x_1, x_2 \in \{F, U\}$.

b) Betrachten Sie das folgende Beispiel der Würfelwahl:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & F \arrow[d] \\ & 6 \end{tikzcd}$$

> **Hinweis.** Schreiben Sie die Möglichkeiten in Form von bedingten Wahrscheinlichkeiten $\big((y)|(x)\big)$ mit $x \in \{F, U\}$ und $y \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ auf.

Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Übergängen zwischen den Würfelwahlen und berechnen Sie hiermit die Wahrscheinlichkeit $P\big((6)|(F)\big)$ dieses Ereignisses.
Zeichnen Sie das Diagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Wurf mit dem unfairen Würfel.

c) Betrachten Sie das folgende Beispiel der Würfelwahl für zwei Würfe:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \rightarrow & F & \rightarrow & U \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 6 & & 6 \end{array}$$

> **Hinweis.** Notieren Sie Ergebnisse in der Form $\big((y_1, y_2, \ldots)|(x_1, x_2, \ldots)\big)$ mit $x_i \in \{F, U\}$ und $y_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. y_i ist jeweils das Wurfergebnis zum Wurf x_i.

Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Übergängen zwischen den Würfelwahlen und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\big((6,6)|(F,U)\big)$ dieses Ereignisses.

d) Berechnen Sie analog zu Teil c) die Wahrscheinlichkeiten des zweifachen Wurfs einer Sechs für alle Auswahlmöglichkeiten des fairen/unfairen Würfels (vgl. das Ergebnis von Teil a).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (F, F), wenn alle möglichen Würfelauswahlen berücksichtigt werden?

e) Führen Sie mit dem ClassPad unter die folgenden Berechnungen für jeweils 100 Elemente in jeder Spalte durch.
Notieren Sie in der Spalte `A` Zahlen nach den folgenden Rechenschritten:

1. Wähle eine Zufallszahl von 1 bis 6.
2. Dividiere die Zufallszahl durch 6.
3. Runde die Zahl ab.

Erklären Sie den Zusammenhang dieser Berechnung zum Münzwurf mit einem fairen Würfel.
Notieren Sie in der Spalte `B` nach den folgenden Rechenschritten:

1. Wähle eine Zufallszahl von 1 bis 10.
2. Dividiere die Zufallszahl durch 6.
3. Runde die Zahl ab.

Erklären Sie den Zusammenhang dieser Berechnung zum Münzwurf mit einem unfairen Würfel.
Notieren Sie in der Spalte `C` die Werte `A·B`. Summieren Sie die Elemente der Spalte `C`. Erklären Sie das Ergebnis. Was bedeutet es für den Wurf mit einem fairen und einem unfairen Würfel?

> **Hinweis.** Zum Abrunden von Zahlen eignet sich der Befehl `int` unter `Erweit.`

f) Folgern Sie aus Teil e) über die Wahrscheinlichkeiten
$P((6,6)|\{F,U\}) \rightsquigarrow$ Wurf zweier Sechsen mit jeweils einem fairen und einem unfairen Würfel ohne Beachtung der Reihenfolge der Würfelwahl und
$P((6,6)|(U,F))$. $\rightsquigarrow$ Wurf zweier Sechsen mit dem unfairen Würfel im ersten und dem fairen Würfel im zweiten Wurf.

> **Hinweis.** In den folgenden Teilaufgaben werden die Bezeichnungen der Würfel für die Matrizenberechnungen geändert: $F \rightsquigarrow 1$ und $U \rightsquigarrow 2$.

g) Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beschreiben Sie das Ergebnis des Aufgabenteils f) mithilfe der Matrizen A, B und der Startverteilung $\vec{\pi}$.

h) Definieren Sie im ClassPad die Matrix B und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P((6,6)|(F,F)), \quad P((6,6)|(U,U)), \quad P((6,6,6)|(F,F,U)), \quad P((6,6,6,6)|(F,F,U,F)).$$

Notieren Sie die Berechnungen in der Form aus Teil g). Geben Sie eine allgemeine Rechenregel für n Sechsen mit dem fairen und dem unfairen Würfel an.

i) Bisher war die Wahl der Würfel sichtbar. Wie groß ist andererseits die Wahrscheinlichkeit für den Wurf zweier Sechsen hintereinander, wenn sich die Würfel nicht mehr von einander unterscheiden lassen?

Bezeichnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse (j) im i-ten Wurf mit $\alpha_i(j)$.

j) Erklären Sie mit den Ergebnissen aus Teil i), dass sich die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl j im dritten Wurf durch

$$\alpha_3(j) = \sum_{i=1}^{2} (\alpha_2(i) \cdot a_{ij}) \cdot b_{j6}$$

berechnen lässt. Folgern Sie hieraus, dass die Wahrscheinlichkeit für drei Sechsen in Folge gleich $\frac{31}{972} \approx 0{,}0319$ ist.